

**ISTITUZIONI ANALISI SUP. 1, AA 05/06**  
**PROVA SCRITTA DEL 06/12/05**

- (1) Provare la disuguaglianza

$$(x + y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p) \quad \forall x, y \geq 0, \quad 1 \leq p < \infty.$$

- (2) Sia data una successione  $\{f_n\} \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$  tale che  $\sum \|f_n\|_p < \infty$ .  
Provare che la serie  $\sum f_n$  converge in  $L^p$  e che vale

$$\left\| \sum f_n \right\|_p \leq \sum \|f_n\|_p.$$

- (3) Sia  $1 \leq p < \infty$ , sia  $q$  il suo esponente coniugato e sia  $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  
provare

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \max \left\{ \int_X fg \mid g \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu), \|g\|_q \leq 1 \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{\int_X fg}{\|g\|_q} \mid g \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu), g \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$